Christoph Ableitinger

Biomathematische Modelle im Unterricht

0. Einleitung

Biologische und gesellschaftliche Fragestellungen können bei Schülern oft reges Interesse hervorrufen, im Mathematikunterricht finden sie jedoch meist nur wenig Raum. Die zugehörigen mathematischen Modelle werden häufig durch Systeme von Differentialgleichungen beschrieben, an eine Bearbeitung vor der 7. Klasse ist daher meist ohnehin nicht zu denken.
Durch Diskretisierung der kontinuierlichen Modelle und mit Hilfe einer Tabellenkalkulation öffnet sich aber eine neue Option, die eine Bearbeitung biomathematischer Themen schon in der Unterstufe sinnvoll macht.

Es wird ein kleiner Einblick in die weite Welt der Biomathematik, in ihre Entstehungsgeschichte und Methoden gegeben, bevor einige Vorschläge zur konkreten Umsetzung im Unterricht gemacht werden.

1. Wachstumsmodelle als Grundlage

Für die Bearbeitung biomathematischer Modelle ist es zuerst notwendig, dass Schüler ein Grundverständnis für einige Wachstumsprozesse entwickeln. Es ist dabei aber nicht gemeint, dass sie wissen sollen, wie Wachstumsprozesse durch Differentialgleichungen beschrieben werden können bzw. wie man diese dann löst. Vorerst reicht es, ein *Denken in Schritten* zu fördern, also die zugehörigen Rekursionsformeln zu behandeln. Besonders wichtige mathematische Tätigkeiten in diesem Zusammenhang sind das *richtige Interpretieren der vorkommenden Terme* und das *Kennen des qualitativen Verlaufs* der Wachstumsprozesse. Es sollen Unterschiede zwischen den Modellen herausgearbeitet werden und Anwendungssituationen zu den einzelnen Modellen sollen angegeben werden können.
Weiters soll auch nicht versäumt werden, entsprechende Modellanalysen durchzuführen. Dazu gehören z. B. das Aufzeigen von Grenzen, das Treffen und Beurteilen von Modellannahmen und das Anpassen der Modellparameter durch Vergleich mit realen Daten.

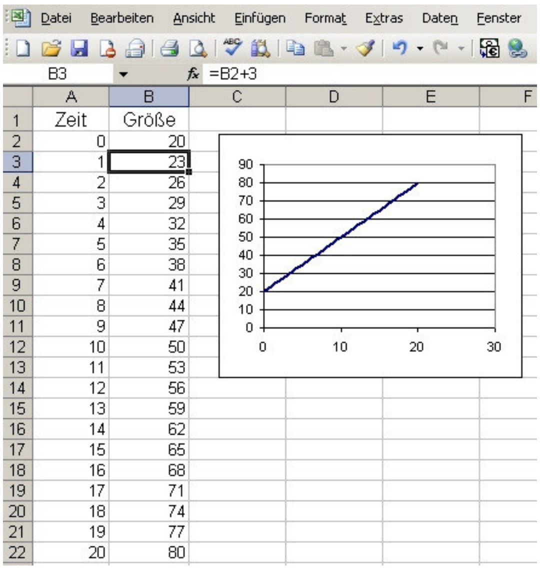
Als Grundlage für die meisten biomathematischen Modelle reichen im Unterricht die folgenden vier Wachstumsmodelle aus:

Lineares Wachstum: Die betrachtete Größe wächst (fällt) in gleichen Zeitabständen immer um den gleichen absoluten Betrag, pro Zeiteinheit also jeweils um *d*.

$$N_{t+1} = N_t + d$$

Will man das Langzeitverhalten analysieren, so entsteht (wenn man nur die Rekursion zur Verfügung hat) ein großer Rechenaufwand. Hier bietet sich die Tabellenkalkulation als geeignetes Werkzeug an. Eine ihrer großen Stärken ist es, dass man eingegebene Formeln durch einfaches „Hinunterziehen“ in andere Zellen übertragen kann.

Stellvertretend für alle Wachstumsprozesse finden Sie in Abbildung 1 einen Screenshot des entsprechenden Excel-Arbeitsblattes.



	A	B
1	Zeit	Größe
2	0	20
3	1	23
4	2	26
5	3	29
6	4	32
7	5	35
8	6	38
9	7	41
10	8	44
11	9	47
12	10	50
13	11	53
14	12	56
15	13	59
16	14	62
17	15	65
18	16	68
19	17	71
20	18	74
21	19	77
22	20	80

Abbildung 1

Exponentielles Wachstum: Die Größe wächst (fällt) in gleichen Zeitabständen immer um denselben relativen Anteil q. Man bezeichnet hier die Größe $r := (1+q)$ als Wachstumsfaktor. Das absolute Wachstum ist also bestandsabhängig.

$$N_{t+1} = N_t \cdot (1+q) = N_t \cdot r$$

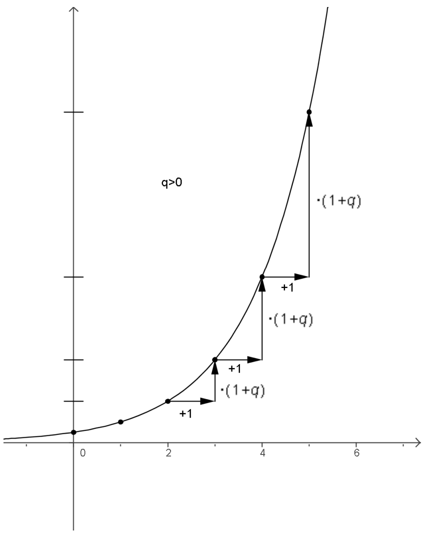


Abbildung 2

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$q > 0 \Leftrightarrow r > 1 \Leftrightarrow Wachstum$$
$$q < 0 \Leftrightarrow r < 1 \Leftrightarrow Abfall, Rückgang$$

Begrenztes Wachstum: Der Wachstumsterm ist hier proportional zum noch vorhandenen Freiraum, der durch $(K - N_t)$ modelliert werden kann. K ist dabei die Kapazitätsgrenze, die angibt, bis zu welchem Wert die betrachtete Größe bzw. der „Bestand“ (aufgrund des vorhandenen Platzangebotes, Nahrunsangebotes, usw.) anwachsen kann.

$$N_{t+1} = N_t + a \cdot (K - N_t)$$

Das Wachstum verlangsamt sich, je näher die betrachtete Größe der festgesetzten Kapazitätsgrenze kommt:

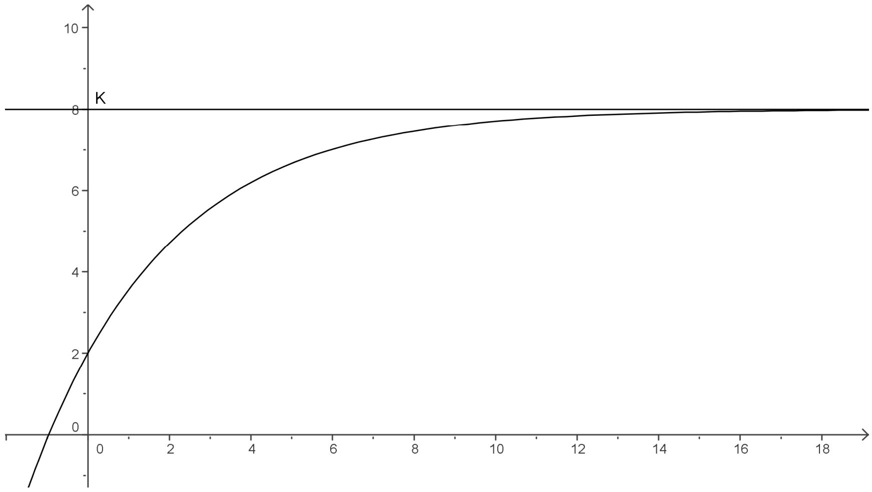


Abbildung 3

Logistisches Wachstum: Hier ist das Wachstum sowohl vom derzeitigen Bestand als auch vom noch vorhandenen Freiraum abhängig.

$$N_{t+1} = N_t + a \cdot N_t \cdot (K - N_t)$$

Dadurch ergibt sich der typische s-förmige Verlauf der zugehörigen Kurve:

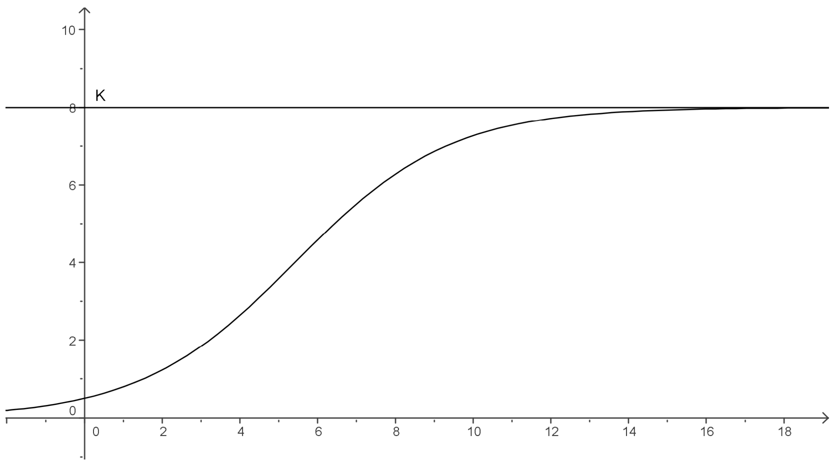


Abbildung 4

2. Geschichtliche Eckpfeiler und Etablierung biomathematischer Teilgebiete

Aufzeichnungen der Bevölkerungsentwicklung – Volkszählungen

In Europa fanden die ersten genauen Volkszählungen zu Beginn des 18. Jh. (in Österreich 1754 unter Maria Theresia) statt. Man wollte die Staatsausgaben besser kontrollieren, Bildungs- und Gesundheitsausgaben genauer planen. Dazu war es nötig, Daten über die Bevölkerung aufzunehmen. Gegen Ende des 19. Jh. wurden diese Daten auch für die damals neu entstehende Versicherungsbranche interessant. Durch Informationen über die Altersstruktur bzw. Lebenserwartungen einer Bevölkerung konnten Risiken besser abgeschätzt und Prämien effizienter berechnet werden. Es wurden mathematische Modelle entwickelt, um Prognosen für die zukünftige Entwicklung von Bevölkerungen ziehen zu können. Heute fasst man dieses Gebiet unter dem Begriff *Demographie* zusammen.

Mendel-Gesetze und Evoultionstheorie

Was um 1860 durch die Mendel-Gesetze bzw. durch Darwins Evolutionstheorie biologisch formuliert wurde, wird heute in der *mathematischen Populationsgenetik* durch theoretische Modelle beschrieben. Es werden Mechanismen wie Selektion, Mutation und Rekombination betrachtet, mit deren Hilfe sich die Vererbung von Merkmalen erklären lässt.

Bekämpfung der Malaria

Im 19. Jh. war die rasche Ausbreitung der Malaria ein großes Problem. Man konnte nur versuchen, die Symptome der Krankheit zu lindern, allerdings hatte man kein adäquates Mittel zur Verhinderung ihrer Übertragung. Zu Beginn des 20. Jh. fand Ronald Ross heraus, dass die Malaria durch Moskitos übertragen wird. Er konnte auch schon ein einfaches mathematisches Modell für die Ausbreitung der Krankheit angeben, das bis heute die Grundlage der *mathematischen Epidemiologie* geblieben ist.

Oszillationen in Tierpopulationen

Im Zeitraum von 1835 bis 1940 wurden von der Hudson´s Bay Company genaue Aufzeichnungen darüber gemacht, wie viele Tierfelle jährlich von der Insel Neufundland geliefert wurden. Dabei fiel auf, dass es in den Anzahlen der Schneehasen- und Luchsfelle zu regelmäßigen Schwankungen mit relativ hoher Amplitude gekommen ist und dass die Maxima der Luchsfelle jenen der Hasenfelle zeitlich etwas hinterherhinkten. Auch im Labor konnten in der Folge solche Beobachtungen zwischen Raub- und Beutetieren beobachtet werden. Ein mathematisches Modell wurde 1925 unabhängig voneinander von Alfred Lotka und Vito Volterra entwickelt. Die *mathematische Ökologie* befasste sich daraufhin nicht nur mit Räuber-Beute-Beziehungen, sondern auch mit anderen Arten der Wechselwirkung wie Symbiose, Konkurrenz und Nahrungsketten.

3. Das Lotka-Volterra-Modell

Ausgangspunkt für die Bearbeitung eines biomathematischen Themas sollte immer das Phänomen oder die biologische Situation selbst sein.

Für Räuber-Beute-Modelle bieten sich hier natürlich die Aufzeichnungen der Hudson´s Bay Company an:

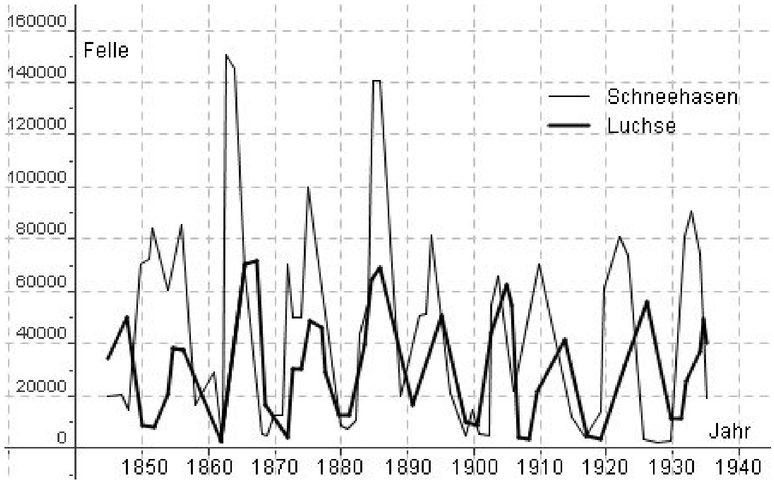


Abbildung 5

Nach dem Kennenlernen des Phänomens und einer groben Analyse der vorliegenden Informationen müssen Modellannahmen getroffen werden.
Diese könnten hier etwa folgendermaßen aussehen:

- Hasen vermehren sich in Abwesenheit der Luchse exponentiell,
  Luchse sterben ohne das Vorhandensein von Hasen exponentiell aus.

- Der Jagderfolg soll proportional zum Produkt aus Hasenanzahl und Luchsanzahl sein.

- Hasen sind die einzige Nahrung von Luchsen und werden auch umgekehrt nur von Luchsen gefressen (das trifft auf Neufundland wegen der relativ geringen Diversität in grober Näherung zu).

Als nächstes wird das Modell erstellt. In der Biomathematik geschieht dies oft durch Verwendung von Differentialgleichungen.

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = a \cdot H(t) - c \cdot H(t) \cdot L(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = -b \cdot L(t) + d \cdot H(t) \cdot L(t)$$

$H(t)$ soll dabei die Anzahl der Hasen, $L(t)$ jene der Luchse zum Zeitpunkt t sein. Die Konstanten a, b, c und d sollen alle positiv sein.

Für den Ausdruck $c \cdot H(t) \cdot L(t)$ gibt es zwei Interpretationsmöglichkeiten:

- Jeder Luchs frisst einen gewissen relativen Anteil c von Hasen, insgesamt werden dann also $c \cdot H(t) \cdot L(t)$ Hasen gefressen.

- Der Jagderfolg ist proportional zur Anzahl der möglichen Begegnungen zwischen Hasen und Luchsen, davon gibt es gerade $H(t) \cdot L(t)$ viele. Ein Anteil c aller dieser Begegnungen führt tatsächlich zum Tod eines Hasen.

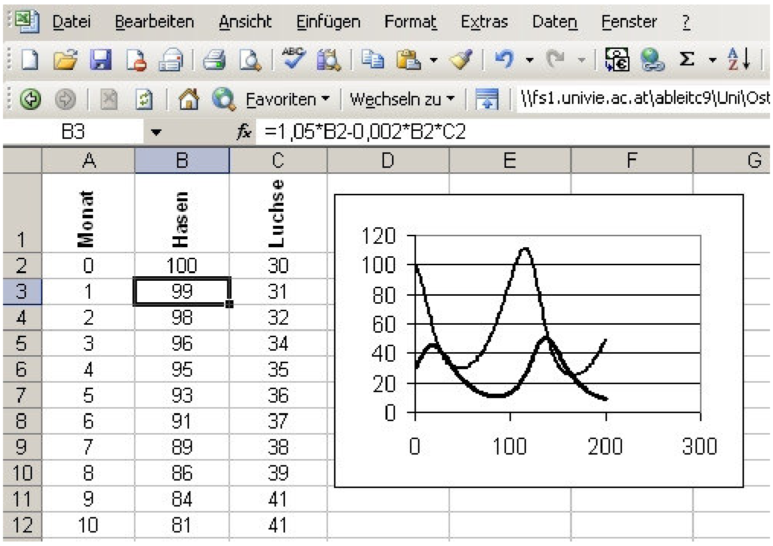
Die obigen Differentialgleichungen werden in der Literatur als *Lotka-Volterra-Differentialgleichungen* bezeichnet.

Lässt man dieses Modell unverändert, ist an eine Bearbeitung vor der 7. Klasse nicht zu denken. Durch Diskretisieren, also Umwandeln der Differentialgleichungen in Differenzengleichungen (Rekursionen), wird jedoch ein Einsatz des Modells sogar schon in der Unterstufe möglich. Die Struktur der Gleichungen bleibt dabei erhalten. Und auch der qualitative Verlauf der Lösungskurven ändert sich nicht, solange man die Zeitschritte der Differenzengleichungen klein genug wählt. Das lässt sich wiederum durch die Wahl der Konstanten a, b, c und d regulieren.

Die dem Lotka-Volterra-Modell entsprechenden Differenzengleichungen sehen wie folgt aus:

$$\boxed{\begin{aligned} H_{t+1} &= (1+a)\cdot H_t - c\cdot H_t \cdot L_t \\ L_{t+1} &= (1-b)\cdot L_t + d\cdot H_t \cdot L_t \end{aligned}}$$

Man forciert hier durch die Beschreibung mittels Rekursionen wieder das Denken in Schritten. Wie vorher gelingt durch den Einsatz von Excel eine Langzeitanalyse der Lösungskurven für beliebige Startwerte H_0 und L_0.



Monat	Hasen	Luchse
0	100	30
1	99	31
2	98	32
3	96	34
4	95	35
5	93	36
6	91	37
7	89	38
8	86	39
9	84	41
10	81	41

Abbildung 6

Man erkennt, dass die Zeitdiagramme im Modell denselben qualitativen Verlauf zeigen, wie die Kurven in den Aufzeichnungen der Hudson´s Bay Company. Dieses einfache Modell mit seinen relativ unrealistischen Annahmen liefert also schon eine ganz gute Beschreibung der biologischen Situation. Die Kurven können durch geeignete Wahl der Konstanten sogar noch exakter an das vorliegende Datenmaterial angepasst werden. Hier ergäbe sich ein experimenteller Zugang für den Unterricht, wenn man die Konstanten im Datenblatt mittels Schiebereglern verändern könnte. Ein solches *Applet* lässt sich in Excel leicht realisieren.

Es muss im Unterricht natürlich auch Platz für eine kritische Auseinandersetzung mit dem Modell geben. Folgende Punkte sollen/können angesprochen werden:

Grenzfälle: - Gibt es keine Luchse, so wachsen die Hasen exponentiell. Dieser Grenzfall ist natürlich unrealistisch, da exponentielles Wachstum ja unbegrenzt ist.

- Durch Erhöhen der Konstante b kann man erreichen, dass die Minima der Luchspopulation sehr „nahe bei Null“ sind. In der Natur würden so kleine Bevölkerungszahlen zum kompletten Aussterben der Tierart führen (weil die wenigen Tiere einander gar nicht begegnen), darauf wird im Modell keine Rücksicht genommen.

Gegenüberstellung verschiedener Modelle: Gerade Räuber-Beute-Beziehungen sind ein gutes Beispiel eines Phänomens, für das in der Geschichte der Biomathematik schon sehr viele Modelle erstellt wurden. Ein Vergleich (sowohl der Modellannahmen als auch der Ergebnisse) kann Aufschluss darüber geben, wie realistisch bzw. verbesserungsbedürftig die jeweiligen Modelle sind.

Art des Modells: Modelle werden immer für einen bestimmten Zweck konstruiert. Natürlich muss man bei der Modellbildung im Blick behalten, ob dieser Zweck auch tatsächlich erfüllt wird. Es muss also ein Unterschied zwischen beschreibenden, erklärenden und vorhersagenden Modellen gemacht werden.

Vergleich mit der Realsituation: Der Bezug zur Realsituation muss gegeben sein und darf nicht aus den Augen verloren werden. Ein biomathematisches Modell darf im Unterricht nicht bloß „mathematischer Stoff“ sein, sondern muss je nach Art des Modells die Realsituation klarer erscheinen lassen oder Prognosen für die Zukunft erlauben. Es muss also darüber diskutiert werden, ob das Modell dieses Kriterium erfüllt.

Modellannahmen: Welche Vereinfachungen macht man bei der Erstellung eines Modells und warum gerade diese? Sind solche Annahmen überhaupt gerechtfertigt und bis zu welchem Punkt haben sie Gültigkeit? Solche oder ähnliche Fragen sollen verdeutlichen, dass es kein Modell geben kann, das wirklich alle Einflüsse berücksichtigt, die auf das betrachtete System wirken.

Verfeinerung und Erweiterung des Modells: Erfüllt ein Modell seinen Zweck nur unzureichend, können die Modellannahmen verändert bzw. verfeinert werden. Im Modell betrachtete Einflüsse können beispielsweise durch andere ersetzt oder ergänzt werden.
Auch die Erweiterung des Modells bringt oft neue Einblicke in Wechselwirkungen. Im Fall des Räuber-Beute-Modells könnte also beispielsweise eine zweite Beutespezies hinzukommen, die mit der ersten Beutespezies um Nahrungsmittel und Platzangebot konkurriert. Diese Situation wollen wir im nächsten Kapitel modellieren.

Diese Aufzählung der möglichen Fragen einer Modellanalyse ist keineswegs vollständig. Es soll hier nur eine Idee davon gegeben werden, wie mit biomathematischen Betrachtungen realistisch umgegangen werden kann. Es wird auf diese Art viel deutlicher, dass die Modellbildung ein dynamischer Prozess ist, an dem man sich die Ersteller und Anwender dieser Modelle zu beteiligen haben.

4. Weitere Modelle

2 Beutearten, 1 Räuber

Ausgangssituation: Betrachten wir zunächst nur 2 Beutetierarten und vorerst noch keinen Räuber. Es wird dabei angenommen, dass eine Beutetierart logistisch wachsen würde, wenn es die jeweils andere Beutetierspezies nicht gäbe. Leben beide Spezies nebeneinander, dann konkurrieren sie z. B. um eine gemeinsame Nahrungsquelle.

Das entsprechende Differenzengleichungssystem sieht folgerdermaßen aus:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t + a \cdot A_t \cdot (K - A_t) - c \cdot A_t \cdot B_t \\ B_{t+1} &= B_t + b \cdot B_t \cdot (K - B_t) - d \cdot A_t \cdot B_t \end{aligned}}$$

Die Anzahl der Beute-1-Tiere zum Zeitpunkt t wird dabei durch A_t beschrieben, während B_t die Anzahl der Beute-2-Tiere angibt. K ist wieder die Kapazitätsgrenze, die jetzt für beide Arten gleich groß sein soll. Durch die Terme $-c \cdot A_t \cdot B_t$ und $-d \cdot A_t \cdot B_t$ wird ausgedrückt, dass eine Spezies genau dann geschwächt bzw. dezimiert wird, wenn sie Nahrungsmittel gegen die andere Spezies verteidigen muss. Das ist aber immer genau dann nötig, wenn es zu Begegnungen zwischen Tieren der unterschiedlichen Arten kommt. Dadurch wird plausibel, dass die Abnahme durch Konkurrenz um eine gemeinsame Nahrungsquelle proportional zu $A_t \cdot B_t$ ist. Die zweite Spezies soll außerdem einen leichten Vorteil im Kampf um die Ressourcen haben, was im Modell gerade dann der Fall ist, wenn $c > d$ gilt.

Ganz unabhängig von den Startwerten A_0 und B_0 stellt sich nach einiger Zeit immer dasselbe Gleichgewicht in den Bestandszahlen ein. Auch das kann man wieder experimentell mit Excel erforschen.

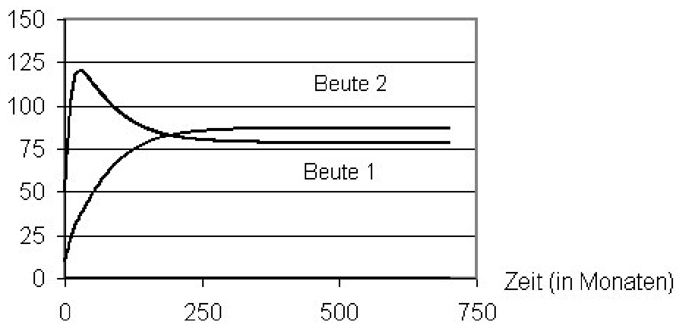


Abbildung 7

Das Modell wird jetzt noch durch eine Raubtierart erweitert, die sich ausschließlich von der Jagd auf die Beute-2-Tiere ernährt. In ihrer Abwesenheit würde die Zahl der Räuber wieder exponentiell abnehmen. C_t steht hier für die Anzahl der Raubtiere zum Zeitpunkt t:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t + a \cdot A_t \cdot (K - A_t) - c \cdot A_t \cdot B_t \\ B_{t+1} &= B_t + b \cdot B_t \cdot (K - B_t) - d \cdot A_t \cdot B_t - f \cdot C_t \cdot B_t \\ C_{t+1} &= C_t - e \cdot C_t + g \cdot C_t \cdot B_t \end{aligned}}$$

Der Verlauf sieht dann folgendermaßen aus:

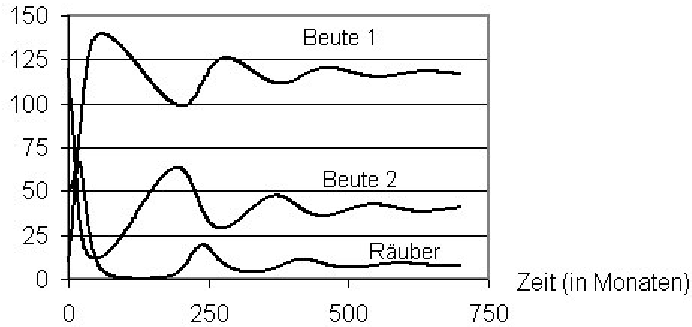


Abbildung 8

Man erkennt, dass sich zwischen Räuber und Beute 2 wieder qualitativ dieselben Schwankungen ergeben wie im einfachen Räuber-Beute-Modell. Beute 1 profitiert immer dann von der Situation, wenn die Anzahl der Beute-2-Tiere gerade sehr niedrig ist.

Das ursprüngliche biologische Gleichgewicht zwischen den Beutearten (ohne Räuber) wird also durch die Raubtiere zerstört. Es dauert in diesem Modell zeitlich gesehen schon wesentlich länger, bis sich ein neues Gleichgewicht einstellen kann.

Tourismus versus Umweltattraktivität

Entfernt man sich etwas von der rein biologischen Situation hin zu gesellschaftlichen Themen, öffnet sich erneut eine sehr große Bandbreite an möglichen Modellen.

Man stelle sich z. B. folgende Situation vor:

Ein idyllisches Dorf (sehr ruhig an einem See gelegen, die Umgebung bewaldet) plant aus finanziellen Gründen den Einstieg in den Tourismus. Sofort wird Kritik laut. Es wird befürchtet, dass der Tourismus die Gegend zerstören wird und dass dann ohnehin keine Touristen mehr kommen würden. Was bliebe sei also zerstörte Natur und nur wenig finanzieller Profit. Die Bewohner des Dorfes interessieren sich also für folgende Fragen:

- Wie stark wird sich die Attraktivität des Gebietes ändern?
- Wie viele Urlauber „verträgt“ das neue Urlaubsziel?
- Kommt es auf Dauer zu stabilen Besucherzahlen?

Die Umweltattraktivität wird nun mit U_t bezeichnet. Sie soll ein Maß dafür sein, wie ruhig und sauber das Gebiet ist, wie schön das Dorf- und Landschaftsbild erscheint und wie gut die Luftqualität ist. Sie wird in Prozent angegeben, wobei ein Wert von 100% optimaler Umweltattraktivität entspricht, während 0% bedeutet, dass das Gebiet überhaupt nicht attraktiv ist. Die Touristenzahl zum Zeitpunkt t wird mit T_t bezeichnet.

Wir gehen davon aus, dass sich die Umweltattraktivität beim Ausbleiben von Touristen logistisch verbessert, also sich dem Wert 100% von unten nähert. Die Touristenzahl andererseits wird exponentiell zurückgehen, wenn die Umweltattraktivität gleich Null ist. Natürlich wird die Umweltattraktivität abnehmen, wenn viele Touristen kommen, das kann durch den Term $-c \cdot U_t \cdot T_t$ modelliert werden. Dabei wird berücksichtigt, dass diese Abnahme auch davon abhängt, wie hoch die Umweltattraktivität im Moment ist. Das kann dadurch begründet werden, dass kleine Veränderungen/Verschmutzungen in einer schönen, sauberen Umgebung viel eher störend wahrgenommen werden als dieselben Veränderungen in einer ohnehin unattraktiven Umgebung. Umgekehrt werden aber Touristen umso stärker angelockt, je höher die Umweltattraktivität gerade ist, das entspricht im folgenden Modell dem Term $+d \cdot U_t$.

$$\boxed{\begin{aligned} U_{t+1} &= U_t + a \cdot U_t \cdot (100 - U_t) - c \cdot U_t \cdot T_t \\ T_{t+1} &= T_t - b \cdot T_t + d \cdot U_t \end{aligned}}$$

Das Langzeitverhalten der Wechselwirkung zwischen Umweltattraktivität und Touristenzahl kann nun wieder mit Hilfe einer Tabellenkalkulation berechnet und dargestellt werden.

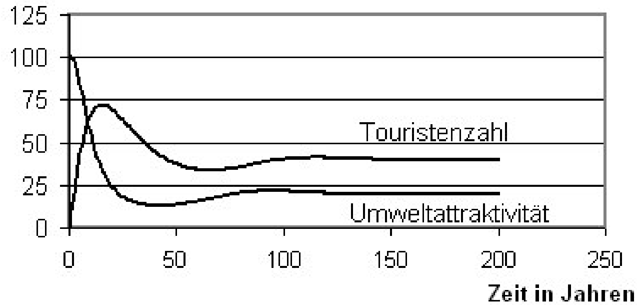


Abbildung 9

Während also die Touristenzahl aufgrund des schönen Gebietes zu Beginn rasch wächst, nimmt die Umweltattraktivität rasant ab. Das hat zur Folge, dass auch die Touristen wieder weniger gern in das Gebiet kommen, usw. Schließlich stellt sich auch hier ein Gleichgewicht ein, das in diesem Modell der Umweltattraktivität nur einen sehr niedrigen Wert zuschreibt.

5. Der Lehrplan

Biomathematik findet im Unterricht normalerweise nur recht selten statt. Obwohl Lehrer oftmals zustimmen, dass es gute Möglichkeiten zur Umsetzung biomathematischer Themen gäbe, reiche die Zeit dafür häufig nicht.

Die folgende Auflistung ist aus den allgemeinen Teilen der AHS-Lehrpläne entnommen, um aufzuzeigen, dass viele ohnehin verpflichtende Forderungen gerade durch die Bearbeitung biomathematischer Fragestellungen erfüllt werden können. Es handelt sich dabei nicht um eine vollständige Liste, sondern nur um eine Auswahl.

AHS-Unterstufe

Bildungs- und Lehraufgabe: Bilden mathematischer Modelle, Erkennen ihrer Grenzen, Aufarbeiten gesellschaftlicher Themen

Didaktische Grundsätze: Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit und projektorientierter Unterricht, Nützlichkeit der Mathematik in Lebensbereichen erfahren, experimentelle Lernformen, Einsatz elektronischer Hilfsmittel

AHS-Oberstufe

Mathematische Kompetenzen: Untersuchung von Naturphänomenen, Modellbildung
Aspekte der Mathematik: Erscheinungen in der Welt wahrnehmen und durch Abstraktion verstehen
Didaktische Grundsätze: anwendungsorientierte Kontexte, fächerübergreifender Unterricht

Klarerweise deckt die Behandlung biomathematischer Modelle aber auch große Teile des Lehrstoffs, also der mathematisch inhaltlichen Forderungen der Lehrpläne, ab.

6. Aktualität

Nicht nur durch den Lehrplan wird man ermutigt, Biomathematik in den Unterricht einzubeziehen, sondern auch durch Themen, die häufig in den Medien diskutiert werden. Meist verlaufen solche Auseinandersetzungen recht emotional ab. Die Mathematik kann hier einen wichtigen Beitrag zur Allgemeinbildung leisten, indem sie hilft, gefühlsbetonte Diskussionen zu versachlichen. Sie erlaubt, einen Blick hinter die Kulissen zu werfen, Abhängigkeiten klarer zu erkennen und Wirkungszusammenhänge zu erklären. Es können mit solch einfachen Modellen, wie sie hier präsentiert wurden, natürlich keine quantitativen Prognosen gezogen werden, sehr wohl aber qualitative Verläufe verstanden und nachempfunden werden.

Beispiele für solche Themen sind:

- Einsatz von Gentechnik, Vererbung von Merkmalen
- Ausbreitung von Krankheiten (AIDS, SARS, Vogelgrippe)
- Rodung des Regenwaldes
- Bevölkerungswachstum – Generationenvertrag
- Verkehrspolitische Themen
- u.v.m.

Für viele dieser Themen gibt es eine Reihe von Modellen in der Fachliteratur. Die Aufgabe des Lehrers besteht nun darin, geeignete Modelle auszuwählen, sie in Differenzengleichungen umzuwandeln und einen Zugang für den konkreten Unterricht zu entwerfen.

7. Literatur

- **Bossel**, H. (1992): Modellbildung und Simulation. Vieweg, Braunschweig
- **Hofbauer**, J.; **Sigmund**, K. (1998): Evolutionary Games and Population Dynamics. University Press, Cambridge
- **Kingsland**, S. (1985): Modeling Nature. The University of Chicago Press, Chicago

MMag. Christoph Ableitinger
christoph.ableitinger@univie.ac.at
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Nordbergstraße 15
A-1090 Wien